



Henryk Żołądek
Uniwersytet Warszawski

Opinia o rozprawie habilitacyjnej "Teoria Morse'a dla hamiltonowskiego funkcjonału działania i klasy funkcjonałów na przestrzeni Banacha" dra Macieja Starostki

Dr Maciej Starostka jest uczniem i współpracownikiem prof. Marka Izydorka. Pod jego kierunkiem napisał pracę magisterską w 2011 r. na PG i obronił rozprawę doktorską w 2017 r. w IM PAN. Przebywał na dwóch Post-Dokach w Niemczech, ale jego stałym miejscem pracy jest Politechnika Gdańska (PG).

Według *MathSciNet* ma opublikowanych 12 prac w czasopismach o zasięgu międzynarodowym (np. *J. Diff. Equat.*, *Discr. Contin. Dynam. Syst. B*, *Calculus of Variations and PDEs*, *J. Fixed Point Th. Appl.*, *Topol. Meth. Nonlin Anal.*, *European J. Math.*). W Autoreferacie są podane jeszcze 4 nieopublikowane prace. Według *MathSciNet* jego prace były cytowane jedynie 25 razy.

Był uczestnikiem szeregu grantów, NCN i zagranicznych. Otrzymał też szereg nagród naukowych i za osiągnięcia organizacyjne. Ja zetknąłem się z nim podczas konferencji w IM PAN poświęconej rocznicy prof. K. Gęby; zainicjowanej przez prof. A. Granasa, ale sprawami organizacyjnymi zajmował się dr Starostka.

Tematykę badawczą dra Starostki można określić jako symplektyczną topologię. V. Arnold w swojej monografii "Matematyczne Metody Mechaniki Klasycznej" (nie cytowanej w Autoreferacie) zauważył, że każdy symplektyczny dyfeomorfizm 2-wymiarowego torusa posiada co najmniej 3 punkty stałe. Przez długi okres ten fakt pozostawał poza kręgiem zainteresowania specjalistów.

Jego odrodzenie nastąpiło na przełomie lat 80-tych i 90-tych ubiegłego wieku, kiedy to A. Floer użył hamiltonowskiego funkcjonału do zdefiniowania pewnego kompleksu łańcuchowego, którego homologie zostały później nazwane homologiami Floera. Została sformułowana tzw. hipoteza Arnolda o oszacowaniu z dołu liczby trajektorii okresowych układów hamiltonowskich na zwartej mnogości przez sumę liczb Betti. Kulminacją były prace K. Fukaya z K. Ono.

Później pojawiły się też inne oszacowania na liczbę trajektorii okresowych, w terminach kategorii Lusternika-Schriemmana (oszacowanie na liczbę punktów krytycznych funkcji oraz tzw. cup-length). Ponadto funkcjonal Floera był uogólniony do innych sytuacji demonstrujących związki teorii pola z topologią (niezmienniki Gromowa-Witten, Donaldsona, Seiberga-Witten i inne).

Wygląda na to, że dr Starostka (ze współautorami) udało się uzyskać pewne wyniki w tej dziedzinie, niektóre uproszczenia starych i niektóre nowe, używając tzw. indeksu Conleya. Niestety, chyba teoria już utraciła zapach świeżości; poza tym nie znalazła istotnych zastosowań w mechanice klasycznej i mechanice kwantowej. Tym można tłumaczyć niskie zainteresowanie pracami dra Starostki.

Przejdę do omówienia wyników 'osiągnięcia habilitacyjnego'.

W pracy **H1** z L. Assellą rozważa się problem ekstremalnych trajektorii okresowych (punktów krytycznych) dla hamiltonowskiego funkcjonału związanego z

nieautonomiczną funkcją Hamiltona $H : \mathbb{S}^1 \times T^*M \rightarrow \mathbb{R}$; te trajektorie są rozwiązaniami odpowiedniego układu Hamiltona. Pokazano, że jeśli $H(t, q, p) = \frac{1}{2}|p|^2 + \text{const}$ dla (q, p) poza pewnym zwartym podzbiorem T^*M , to ten funkcjonal spełnia tzw. warunek Palais-Smale'a (pozwalaający stosować teorię punktów krytycznych).

To pozwoliło udowodnić istnienie tzw. zamkniętych liści charakterystycznych (czyli trajektorii okresowych) na zwartych poziomicach autonomicznej funkcji Hamiltona. Stanowi to nowy dowód pewnego twierdzenia H. Hofera i C. Viterbo.

Praca **H2**, również z Assellą, stanowi rozwinięcie idei z poprzedniej pracy. Jej główny wynik mówi o założeniach, przy których hamiltonowski funkcjonal związany z H na $\mathbb{S}^1 \times T^*M$ pozwala zdefiniować tzw. kompleks Morse'a ze współczynnikami $\mathbb{Z}_2$. Ten kompleks jest związany z punktami krytycznymi funkcjonala i z trajektoriami łączącymi jako różniczki (jak dla funkcji Morse'a na skończenie wymiarowej rozmaitości). Okazuje się, że homologie tego kompleksu są bardzo proste i pokrywają się z homologiami singularnymi przestrzeni wolnych pętli na M (jak również z odpowiednimi homologiami Floera T^*M).

Ta praca jest długa i techniczna a powodem tego jest fakt, że indeks (jak i koindeks) Morse'a jest nieskończony, czyli problem jest silnie nieokreślony.

W pracy **H3**, znowu z Assellą, rozważa się funkcjonal

$$f(u) = \frac{1}{2p} \int_{\Omega} (1 + |\nabla u|^2) d^n x + \int_{\Omega} G(u) d^n x$$

na pewnej przestrzeni Sobolewa X funkcji u na obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; tutaj $2 \leq n < 2p$ i funkcja G spełnia oszacowanie typu $|G(t)| < \beta|t|^\alpha + \delta$. Odpowiednie równanie różniczkowe zawiera tzw. p -laplacian.

Pokazano, że jeśli punkty krytyczne funkcjonala f są niezdegenerowane (w określonym sensie), to homologie Morse'a ze współczynnikami z $\mathbb{Z}_2$ są dobrze określone i izomorficzne z homologiami przestrzeni X .

Praca **H4**, w odróżnieniu od pozostałych prac z osiągnięcia habilitacyjnego, jest samodzielna. Również jej tematyka ma inny charakter. Zawiera ona przykład gradientowych pól wektorowych: ∇f i ∇g na $\mathbb{R}^n$, gdzie

$$f(x) = |x|^2, \quad g(x) = -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2.$$

Okazuje się, że te pola są homotopijne w kategorii właściwych odwzorowań $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ale nie są homotopijne w kategorii właściwych odwzorowań gradientowych.

Zatem przypadek z $\mathbb{R}^n$ różni się od przypadku kuli $\mathbb{B}^n$, rozważanego przez A. Parusińskiego.

W pracy **H5** z Izydorkiem i Assellą zastosowano indeks Conley'a do nowego dowodu hipotezy Arnolda dla $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Dokładniej, pokazano, że hamiltonowski dyfeomorfizm przestrzeni rzutowej (z formą symplektyczną będącą częścią urojonej metryki Fubini-Study) ma co najmniej $n + 1$ punktów stałych.

Hamiltonowski dyfeomorfizm to rozwiązanie po czasie $t = 1$ zagadnienia początkowego układu hamiltonowskiego z funkcją Hamiltona $H(t, x)$, która jest 1-okresowa po t .

Praca **H6** z Assellą zawiera dowód 'zdegenerowanej' hipotezy Arnolda dla $\mathbb{T}^{2m} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Wykazano istnienie co najmniej $2m + n + 1$ ściągających punktów stałych.

Punkt stały $x = \varphi(1, x) = \varphi(0, x)$ jest ściągalny, jeśli pętla $\{\varphi(t, x) : 0 \leq t \leq 1\}$ jest ściągalna. Zdegenerowanie polega na tym, że ∇H jest mały (z konkretnym oszacowaniem) w kierunku przestrzeni rzutowej.

Dr Starostka przed doktoratem opublikował 3 samodzielne prace w bardzo dobrych europejskich czasopismach. Również ma szereg prac po doktoracie, które nie weszły w skład habilitacji; są one wspólne. Ich tematyka jest z grubsza taka jak tych z habilitacji. W Autoreferacie są one pokrótce przedstawione; ja nie będę powtarzał tych omówień.

Moje wrażenie po lekturze tego dorobku jest zdecydowanie pozytywne. Habilitant jest bardzo dobrym specjalistą w swojej dziedzinie. Jest również aktywny w działalności dydaktycznej i organizacyjnej.

Ja sam mam pewne doświadczenie w dynamice hamiltonowskiej, głównie z punktu widzenia mechaniki klasycznej. Dlatego chętnie podjąłem się tej recenzji.

Zwykle w wyniku takiego wysiłku mam nowe pomysły; jak w przypadku doktoratu D. Strzeleckiego czy habilitacji P. Kokockiego (oba z UMK). Jeśli chodzi o tę rozprawę, to na razie nic mi nie przychodzi do głowy.

Podsumowując, przedstawione osiągnięcia habilitacyjne i pozostały dorobek dra Macieja Starostki spełniają wszystkie warunki stawiane tego typu rozprawom.

Warszawa, dn. 2025-12-13

Azeta del